18.01.2022, Vorlesung (9)

[Wh.: Himmelsmechanik

Ausgehend von der Kepler-Gleichung $\ddot{x} = -\frac{x}{\|x\|^3}$]

hatten wir das Bewegungsgesetz für das System Sonne–Erde auf $\Omega = Q \times \mathbb{R}^6$,

$$Q = \{(x_S, x_E) \in \mathbb{R}^6 : x_S \neq x_E\}$$

wie folgt bestimmt:

$$(1)\qquad m_S \ddot{x}_S = \underbrace{- m_S c_E \underbrace{\frac{x_S - x_E}{\|x_S - x_E\|^3}}_{= G_E(x_S)}}_{= F_S(x_S)}$$

träge Massen

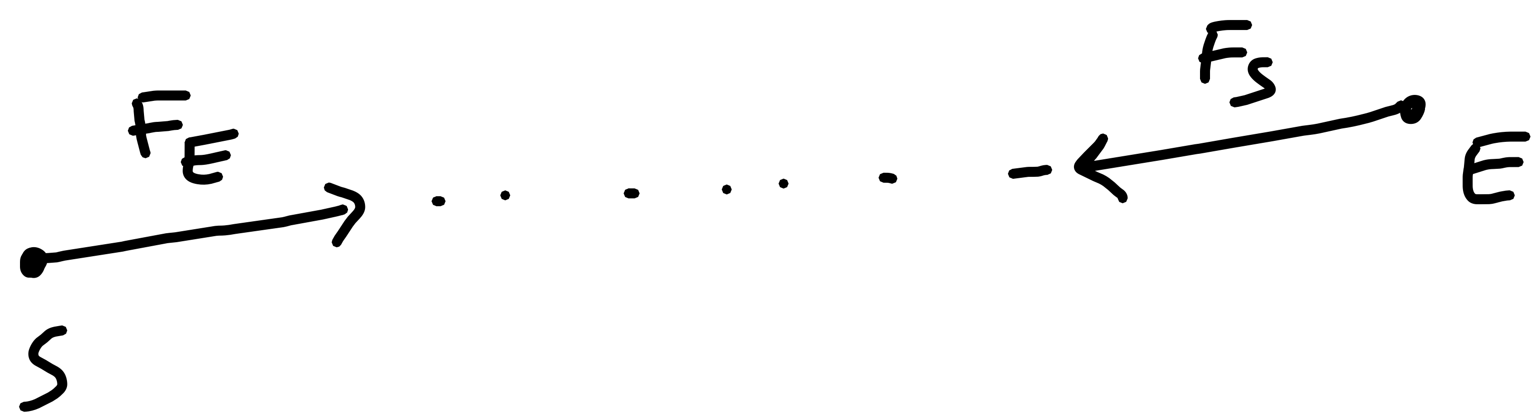
schwere Massen

$$(2)\qquad m_E \ddot{x}_E = \underbrace{- m_E c_S \underbrace{\frac{x_E - x_S}{\|x_E - x_S\|^3}}_{= G_S(x_E)}}_{= F_E(x_E)}$$

$\lrcorner$

(3.3) **Das 3. Newtonsche Gesetz** („Actio = Reactio"). Es besagt, dass die Kräfte $F_S(x) = m_S G_E(x)$, die die Erde auf die Sonne ausübt, und $F_E(x) = m_E \cdot G_S(x)$, die die Sonne auf die Erde ausübt, vom Betrage gleich und entgegengesetzt zueinander sind,

$$F_E + F_S = 0 .$$



Mit

$$F_E(x_E) = m_E \cdot G_S(x_E) = -m_E c_S \cdot \frac{x_E - x_S}{\|x_E - x_S\|^3}$$

und

$$F_S(x_S) = m_S \cdot G_E(x_S) = -m_S c_E \frac{x_S - x_E}{\|x_S - x_E\|^3}$$

führt das zu

$$-m_E c_S + m_S c_E = 0$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{c_E}{m_E} = \frac{c_S}{m_S} =: \gamma \quad \text{konstant}$$

(universelle Gravitationskonstante $\gamma > 0$).

Insgesamt also zu

$$(1) \qquad \cancel{m_S}\, \ddot{x}_S = -\gamma\, \cancel{m_S}\, m_E \frac{x_S - x_E}{\| x_S - x_E \|^3}$$

$$(2) \qquad \cancel{m_E}\, \ddot{x}_E = -\gamma\, \cancel{m_E}\, m_S \frac{x_E - x_S}{\| x_E - x_S \|^3} \, . \qquad (*)$$

(Wegen $m_E \ll m_S$ führt das in (1) näherungsweise zu $x_S = 0$ bei $x_S(0) = 0$, $\dot{x}_S(0) = 0$ und in (2) zu

$$\ddot{x} = - \frac{x}{\| x \|^3}$$

(bei $\gamma m_S = 1$ nach Zeitreskalierung).

(*) wird als 2-Körperproblem bezeichnet.

Der Ausdruck für die Kraft, die ein Körper der (schweren) Masse $m_1 > 0$ auf einen Körper der schweren Masse $m_2 > 0$ ausübt,

$$F \sim m_1 m_2 \frac{x_2 - x_1}{\| x_2 - x_1 \|^3}$$

wird als universelles Gravitationsgesetz bezeichnet und stammt ebenfalls von I. Newton. Zusammen mit seinen Gesetzen (1)-(3) bildet es die Grundlage der Himmelsmechanik.

(3.4) Das N-Körperproblem. Wir nehmen nun ein System von N Körpern $(N \geq 2)$ mit Massen $m_1, \dots, m_N > 0$ an den Orten $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^3$ an, $x_j = (x_j^1, x_j^2, x_j^3)$. Es sei zudem $x_j \neq x_k$ für $1 \leq j < k \leq N$. Man denke etwa an unser Sonnensystem bestehend aus der Sonne und ihren 9 Planeten. Sei $j \in \{1, \dots, N\}$ fest. Jeder der $N-1$ Körper mit Massen $m_1, \dots, m_{j-1}, m_{j+1}, \dots, m_N$ übt auf den j. Körper eine Kraft F_{jk} am Ort x aus, deren Gesamt sich somit zu

$$F_j(x) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N} F_{jk}.$$

mit

$$F_{jk}(x) = - m_j m_k \frac{x - x_k}{\|x - x_k\|^3}$$

(bei $j = 1$), addiert.

Die Bew.-gleichungen für alle N Körper werden damit zu

$$(*) \qquad \cancel{m_j} \ddot{x}_j = - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N} \cancel{m_j} m_k \frac{x_j - x_k}{\|x_j - x_k\|^3} \quad (j = 1, \dots, N).$$

(3.5) Die potentielle Energie: Führt man nun auf dem Konfigurationsraum

$$Q = \{ (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{3N} : x_i \neq x_j \text{ für } i \neq j \}$$

(offen in $\mathbb{R}^{3N}$) die glatte Funktion $V : Q \to \mathbb{R}$,

$$V(x_1, \dots, x_N) = - \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{N} \frac{m_j m_k}{\| x_j - x_k \|},$$

genannt: potentielle Energie, ein, so findet man wegen

$$D_j\left(\|x_j-x_k\|^{-1}\right) = D_j\left(\langle x_j-x_k, x_j-x_k\rangle^{-1/2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\langle x_j-x_k, x_j-x_k\rangle^{-3/2}\cdot 2(x_j-x_k)$$

($\triangle$ $D_j = (D_j^1, D_j^2, D_j^3)$)

$$= -\frac{x_j-x_k}{\|x_j-x_k\|^3},$$

dass (*) geschrieben werden kann als

(**) $$m_j\ddot{x}_j = -D_{x_j}V(x) \qquad (j=1,\dots,N)$$

(In der Tat ist (**) sogar Hamiltonsch (bei $q_j = x_j$, $p_j = m_j \dot{x}_j$.)

Man nennt (**) das *N-Körperproblem der Himmelsmechanik*. Es ist für $N \geq 3$ weitgehend ungelöst in dem Sinne, dass man nur für sehr spezielle Anfangsbedingungen $(x_0, \dot{x}_0) \in \Omega := Q \times \mathbb{R}^{3N} \subseteq \mathbb{R}^{6N}$ auch nur qualitativ weiß, wie die zugehörigen Bahnen aussehen.

(3.6) Die 10 ersten Integrale der Himmelsmechanik

(a) Die Energie. Sei $\Omega = Q \times \mathbb{R}^{3N} \subseteq \mathbb{R}^{6N}$ der Phasenraum des N-Körperproblems, $m_1, \dots, m_N > 0$ gegeben. Für jedes $j \in \{1, \dots, N\}$ nennt man $T_j : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$T_j(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m_j \| \dot{x}_j \|^2$$

die kinetische Energie des j. Körpers und mit $T : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$T = \sum_{j=1}^{N} T_j$$

die (Gesamt-) kinetische Energie des Systems.
Mit $H : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$H := T + V$$

wird die (Gesamt-) Energie des Systems bezeichnet.

(b) Der (lineare) Impuls.

Mit $\underline{P}_j : \Omega \to \mathbb{R}^3$,

$$\underline{P}_j(x, \dot{x}) = m_j \, \dot{x}_j$$

wird **der Impuls des j. Körpers** bezeichnet und mit $\underline{P} : \Omega \to \mathbb{R}^3$

$$\underline{P} := \sum_{j=1}^{N} \underline{P}_j$$

der (Gesamt-) Impuls des Systems.

(c) Der Drehimpuls.

Mit $L_j : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$L_j(x, \dot{x}) = m_j \, x_j \times \dot{x}_j \quad (j = 1, \dots, N)$$

wird der Drehimpuls des j. Körpers bezeichnet und mit $L : \Omega \to \mathbb{R}^3$,

$$L = \sum_{j=1}^{N} L_j$$

der (Gesamt-) Drehimpuls des Systems.

Satz (Erhaltungssätze). H, P und L sind 1. Integrale für das N-Körperproblem.

Beweis. (i)

$$\frac{d}{dt} H(x(t), \dot{x}(t)) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^N \frac{1}{2} m_j \langle \dot{x}_j, \dot{x}_j \rangle + V(x(t))\right)$$

$$= \sum_{j=1}^N m_j \langle \ddot{x}_j, \dot{x}_j \rangle^{(t)} + \sum_{j=1}^N \langle D_{x_j} V(x), \dot{x}_j \rangle (t)$$

$$= \sum_{j=1}^N \langle \dot{x}_j, \underbrace{m_j \ddot{x}_j + D_{x_j} V(x)}_{=0} \rangle = 0 .$$

(ii) Erinnere: $F_{ij} + F_{ji} = 0, \quad 1 \leq i < j \leq N.$

Es folgt:

$$\frac{d}{dt} P(x(t), \dot{x}(t)) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{N} m_j \dot{x}_j\right) = \sum_{j=1}^{N} m_j \ddot{x}_j$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N} F_{jk} = \sum_{i \neq j} F_{ij} = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \underbrace{(F_{ij} + F_{ji})}_{=0} = 0.$$

(iii) $$\frac{d}{dt} L(x(t), \dot{x}(t)) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{N} m_j \, x_j \times \dot{x}_j\right)$$

$$\overset{PR}{=} \sum_{j=1}^{N} m_j \Big(\underbrace{\dot{x}_j \times \dot{x}_j}_{=0} + x_j \times \ddot{x}_j \Big)$$

$$= \sum_{j=1}^{N} x_j \times (m_j \ddot{x}_j) = \sum_{j=1}^{N} x_j \times \Big(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N} m_j m_k \frac{x_j - x_k}{\| x_j - x_k \|^3} \Big)$$

$$= \sum_{j \neq k} \frac{m_j m_k}{\| x_j - x_k \|^3} \Big(\underbrace{x_j \times x_j}_{=0} - x_j \times x_k \Big)$$

$$= -\sum_{1 \leq j < k \leq N} \frac{m_j m_k}{\| x_j - x_k \|} \Big(\underbrace{x_j \times x_k + x_k \times x_j}_{=0} \Big) = 0 .$$

$\square$

Definition. Mit $S: Q \to \mathbb{R}^3$,

$$S(x) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{N} m_j x_j \,, \quad M := m_1 + \cdots + m_N .$$

wird der Schwerpunkt des Systems bezeichnet.

Äquivalent zum Impulserhaltungssatz ist:

Satz (Schwerpunktsatz). Der Schwerpunkt des Gesamtsystems bewegt sich so, als ob gar keine Kräfte auf ihn wirken,

$$\ddot{S} = 0$$

Beweis.

$$\dot{S} = \frac{d}{dt} S(x(t)) = \frac{1}{M} \sum m_j \dot{x}_j = \frac{1}{M} P$$

$$\Rightarrow \ddot{S} = \frac{1}{M} \dot{P} = 0 . \qquad \boxtimes$$

Damit bewegt sich also S gleichförmig geradlinig (1. Newtonsches Gesetz):

$$S(t) = S_0 + t \cdot \dot{S}_0$$

$\boxtimes$

(3.7) Invarianz unter Galilei-Transformationen